Esercitazioni di Analisi Matematica 1 – Prof. A. Bonfiglioli

Foglio 8 - Limiti con la Formula di Taylor

► **Esercizio** 1. Nonostante in generale non sia vero che $o(x^5)$ sia anche un $o(x^6)$ (mentre è vero il viceversa), spiegare perchè, oltre alla nota formula

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0,$$

è vera anche la formula

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0.$$

► **Esercizio** 2 (Funzioni iperboliche). Si definiscono le funzioni iperboliche nel modo seguente:

Seno iperbolico: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$);

Coseno iperbolico: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$);

Tangente iperbolica: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$).

Studiare le funzioni di cui sopra in termini di monotonia e insieme immagine.

Dimostrare inoltre i seguenti fatti:

1. Identità fondamentale della trigonometria iperbolica:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R};$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{tgh} x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$.

3. $\sinh x$ è una funzione strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$; la sua funzione inversa si chiama **arcoseno iperbolico**, denotata con $\operatorname{arcsinh} x$;

4. la restrizione di $\cosh x$ all'intervallo $[0, +\infty[$ è una funzione strettamente crescente e il suo insieme immagine è $[1, +\infty[$; essa è dunque invertibile su $[1, +\infty[$; la sua funzione inversa si chiama **arcocoseno iperbolico**, denotata con $\operatorname{arccosh} x$;

5. la funzione $\operatorname{tgh} x$ è una funzione strettamente crescente e il suo insieme immagine è $]-1, 1[$; essa è dunque invertibile su $]-1, 1[$; la sua funzione inversa si chiama **arcotangente iperbolica**, denotata con $\operatorname{arctgh} x$;

6. Mediante la formula per la derivata della funzione inversa, dimostrare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

7. Mediante la formula per la derivata della funzione inversa, dimostrare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \forall\, x > 1.$$

8. Mediante la formula per la derivata della funzione inversa, dimostrare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctgh} x = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad \forall\, x \in]-1, 1[.$$

9. Ricavare le formule esplicite per $\operatorname{arcsinh} x$, $\operatorname{arccosh} x$ e $\operatorname{arctgh} x$ seguenti:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsinh} x &= \log(x+\sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbb{R}; \\ \operatorname{arccosh} x &= \log(x+\sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1; \\ \operatorname{arctgh} x &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in]-1,1[. \end{aligned}$$

Grazie a queste tre formule esplicite, verificare le formule per le derivate di $\operatorname{arcsinh} x$, $\operatorname{arccosh} x$ e $\operatorname{arctgh} x$ ottenute nei tre punti precedenti.

10. Si hanno gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9) \quad \text{per } x \to 0; \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^8) \quad \text{per } x \to 0; \\ \operatorname{tgh} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

► **Esercizio** 3 (Facoltativo - Difficile!). Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x}, & \text{se } x > -1 \text{ con } x \neq 0 \\ e, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Dimostrare che $f(x)$ è continua su $]-1,+\infty[$. Dimostrare che $f(x)$ è anche derivabile due volte su $]-1,+\infty[$. Dimostrare il seguente sviluppo di Taylor

$$(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11\,e}{24}x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0.$$

► **Esercizio** 4. Ricorrendo al calcolo delle derivate iterate (e alla definizione stessa della Formula di Taylor), dimostrare i seguenti sviluppi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \quad \text{per } x \to 0, \\ \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^9), \quad \text{per } x \to 0 \\ \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \quad \text{per } x \to 0 \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + o(x^5), \quad \text{per } x \to 0 \end{aligned}$$

► **Esercizio** 5. Ricorrendo agli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari riportati alla fine del foglio, calcolare i seguenti limiti (per gli esercizi in cui è presente $\operatorname{tg} x$ usare lo sviluppo di cui sopra):

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$ [1/6]

   [Fare questo esercizio ANCHE col Teorema di De L'Hôpital. Quante volte va applicato?]

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^4}$ [$\nexists$]

   [Si può usare il Teorema di De L'Hôpital??]

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^5}$ [$+\infty$]

   [Si può usare il Teorema di De L'Hôpital?? Quante volte va applicato?]

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{\sin x})\, e^x}{x^3 \, \cos x}$ [1/6]

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 - 2\, \cos x}{x^4}$ [−1/12]

[Fare lo stesso esercizio anche col Teorema di De L'Hôpital e osservare quanto è più rapido lo svolgimento con la Formula di Taylor.]

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2 - 2\, \cos x}{x^3 \cos x}$ [0]

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2 - x^2 - 2\, \cos x}{x^5}$ [$-\infty$]

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}}$ [−3]

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\mathrm{tg}\,(x^3)} - 1}{x(\cos x - e^{x^2})}$ [−2/3]

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$ [1]

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3} - x^2}$ [$\nexists$]

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3} - x^2}$ [$-\infty$]

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$ [1/3]

14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3 \cdot (e^x)^8 \cdot (e^x - \cos x)}$ [1/3]

15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \sin x^2}{x^2 \log(\cos x)}$ [2/3]

16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 x - \sin x^2) \cos x}{x^2 \log(\cos x)}$ [2/3]

17. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 x - \sin x^2)(\cos x)^{1000}}{x^2 \log(\cos x)}$ [2/3]

18. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$ [−9/5]

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4 \,\mathrm{tg}\, x}$ [$+\infty$]

20. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{(\sin x - x)^2}$ [$-\infty$]

21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1+x^8} - \sqrt[3]{1+x^8}}$ [−3]

[Tentare di fare questo esercizio col Teorema di De L'Hôpital sarebbe una pessima idea!!!]

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1+x^4} - \cos(x^2)}$ [1/6]

[Usare lo sviluppo di $\arcsin x$ precedentemente trovato...]

23. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{1}{x^2}$ [1/6]

24. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \operatorname{tg}(3x) - \sqrt{1+9x^2}}{x^2 + x\,\log(1-x)}$ [9]

[Provare a fare questo esercizio ANCHE col Teorema di De L'Hôpital.]

25. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \operatorname{tg}(3x) - \sqrt{1+9x^2}}{(x^2 + x\,\log(1-x))^3}$ [$+\infty$]

26. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \log(1+x) - 1}{x - \sin x}$ [-7]

[Fare questo esercizio ANCHE col Teorema di De L'Hôpital.]

27. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \log(1+x) - 1}{(x - \sin x)\operatorname{tg} x}$ [$-\infty$]

28. $\lim_{x\to 0} \frac{x\,e^{x-x^2} - x\,\log(1+x) - x + x^9}{x - \sin x}$ [0]

29. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\operatorname{tg} x - x}$ [$-1/2$]

30. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{(\operatorname{tg} x - x)^2}$ [$\nexists$]

31. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$ [11/24]

32. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^5}$ [$+\infty$]

33. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x\operatorname{tg} x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$ [$-2/3$]

[Tentare di fare questo esercizio col Teorema di De L'Hôpital sarebbe un'altra pessima idea!!!]

34. $\lim_{x\to +\infty} \Big(x - x^2 \log(1 + \sin(1/x)) \Big)$ [1/2]

35. $\lim_{x\to 0} \frac{5^{1+\operatorname{tg}^2 x} - 5}{1 - \cos x}$ [$10\ln 5$]

[Fare questo esercizio ANCHE col Teorema di De L'Hôpital.]

36. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}(x^2)}{x^2 - \sin(x^2)}$ [-2]

37. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}(x^2)}{x^2 - \sin^2 x}$ [0]

38. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\,\cos(x/\sqrt{3})}{x^5}$ [1/270]

39. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\,e^{-x} - \log(1+2x)}{x^3}$ [-3]

40. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\,e^{-x} - \log(1+2x)}{x^3\,e^x\,\cos x}$ [-3]

41. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\,e^{-x} - \log(1+2x)}{x^2}$ [0]

42. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(2x)\, e^{-x} - \log(1+2x)}{x^4}$ $[-\infty]$

43. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{2\,\cos(x+x^2) - 2 + x^2 + 2\,x^3 + x^{100}}{x^4}$ $[-11/12]$

44. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{2\,\cos(x+x^2) - 2 + x^2 + 2\,x^3 + x^{100}}{x^5}$ $[+\infty]$

45. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(e^x - 1) - x - x^2/2}{x^4}$ $[-5/24]$

46. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\sin(e^x - 1) - x - x^2/2}{x^4 \sin x}$ $[+\infty]$

47. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\log^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$ $[0]$

48. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1 - e^{-x^2}}{\log^2(1+x) - \sin^2 x}$ $[+\infty]$

49. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-x^2}}{\log^2(1+x) - \sin^2 x}$ $[\nexists]$

50. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$ $[1/4]$

51. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$ $[2/3]$

Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9) \qquad \text{per } x \to 0,\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0,\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0,\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0,\\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\, x^5 + \frac{17}{315}\, x^7 + o(x^7) \qquad \text{per } x \to 0,\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\, x^3 +\\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}\, x^4 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!}\, x^5 + o(x^5),\\
&\quad \text{per } x \to 0
\end{aligned}
$$